

# Estimering af CES-efterspørgselssystemer - En Kalman Tilgang

Anders F. Kronborg\*, Christian S. Kastrup og Peter P. Stephensen, DREAM

May 18, 2018

## 1 Indledning

Dette papir beskriver hvordan Kalman-filteret - muligvis - kan bruges til estimering af faktorefterspørgslen i en nestet CES-struktur samt beskrive udviklingen over tid i de faktorspecifikke effektivitetsindeks. Projektet er stadig »work in progress« og resultater og konklusioner er derfor foreløbige. I DREAM har vi en lang tradition for at kalibrere nastede CES-produktionsfunktioner. Vi har typisk kalibreret til et bestemt år. I den nye konjunkturmodel ønsker vi at kunne kalibrere til flere efterfølgende år, således at de kalibrerede parametre meningsfuldt kan fortolkes som en tidsrække, for eksempel i forbindelse med fremskrivninger eller til beskrivelse af økonomiens strukturelle størrelser. Ved kalibrering antager man substitutionselasticiteterne for kendte og beregner fordelingsparametrene. I stedet ønsker vi en metode, der (ideelt set) *både* estimerer substitutionselasticiteterne samt filtrerer de faktorspecifikke effektivitetsindeks. Som eksempler betragtes i det efterfølgende ADAM-sektorerne for fremstilling og privat service.

## 2 Problemet

Antag at virksomhedens produktionsfunktion er givet som:

$$y_t = \left[ \sum_j \mu_{jt}^{\frac{1}{E}} q_{jt}^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}} \quad (1)$$

Vi antager at substitutionselasticiteten  $E$  er konstant, mens andelsparameteren  $\mu_{jt}$  tillades at variere over tid. Det er velkendt, at dette er nødvendigt for at forklare en nogenlunde konstant faktorafløbning mellem kapital og arbejdskraft samtidigt med, at per capita indkomsten vokser over tid - med mindre at  $E = 1$  (så produktionsfunktionen er Cobb-Douglas). Hvis  $E < 1$  kræver det derimod, at der er biased teknologiske

---

\*E-mail: ank@dreammodel.dk

fremskridt. Eksemplet illustrerer meget godt, hvordan substitutionselasticiteten og den faktorspecifikke effektivitetsvækst er uløseligt forbundet.

Virksomhedens omkostningsminimering, givet produktionsfunktionen i (1) resulterer i CES-efterspørgslen:

$$q_{jt} = \mu_{jt} \left( \frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-E} Q_t \quad (2)$$

hvor  $Q_t$  er et aggregat af de faktorinput, der indgår i det betragtede nest og  $P_t$  er det tilsvarende kædeprisindeks. Ved estimation af produktionsfunktioner er det nødvendigt at gøre nogle antagelser om den tidsmæssige udvikling i  $\mu_{jt}$  eller  $e_{jt}$ . Det gøres typisk ved at fitte den historiske udvikling i effektivitetsindekset til en deterministisk, funktionel form, eksempelvis lineære trends (Antras [2004]), højere-ordens polynomier (eksempelvis ADAM), Box\_Cox transformeret trendspecifikation (Klump et al. [2007]) eller logistiske trappefunktioner (Thomsen [2015]). Afvigelserne fra en lineær trend giver for eksempel mulighed for at beskrive »mellemlangsigtede« fluktuationer i faktor aflønning i effektivitetsraterne for faktorinputtene (Blanchard [1997]).

Hvis vi definerer budgetandelen  $s_{jt} = \frac{p_{jt}^q q_{jt}}{p_t y_t}$  kan (2) omskrives i forhold til budgetandele

$$s_{jt} = \mu_{jt} \left( \frac{p_{jt}^q}{p_t} \right)^{1-E} \quad (3)$$

Estimationen kan principielt anvendes på begge specifikationer, men (3) har den fordel i forhold til (2), at det er mindre sandsynligt, at der er korrelerede målefejl på både højre- og venstresiden, hvilket principielt kan give bias i estimatet for  $E$  (vi finder dog, at dette har meget begrænset betydning).

Ovenstående specifikation i (1) er måden hvorpå produktionsfunktioner typisk ser ud i MAKRO. Hvis man fx bedre kan lide en specifikation der indeholder et effektivitetsindeks  $e_{jt}$ :

$$y_t = \left[ \sum_j \alpha_j (e_{jt} q_{jt})^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}, e_{j0} = 1, \quad (4)$$

skal man blot omregne fx således:

$$e_{jt} = \left( \frac{\mu_{jt}}{\mu_{j0}} \right)^{\frac{1}{E-1}} \quad (5)$$

hvor  $\alpha_j = \mu_{j0}^{\frac{1}{E}}$  og  $t = 0$  er et basis-år. Ideen i nærværende papir er at anvende en fleksibel metode, som ved hjælp af Kalman-filteret *både* estimerer substitutionselasticiteterne samt giver et bud på den historiske udvikling i de uobserverede faktorspecifikke effektivitetsindeks (dette er beskrevet i det følgende afsnit). Vi har tidligere afprøvet nedenstående metode ved Monte Carlo-eksperimenter og fået gode resultater for så vidt angår estimation af elasticiteten for simuleret data med den relevante længde.

### 3 Estimering af en nestet CES-struktur: En Kalman-tilgang

Vi opstiller følgende state-space model:

$$\begin{aligned} \log(s_t) &= F\theta_t + (1 - E_t)\log\hat{P}_t + \varepsilon_t^s \\ \theta_t &= G\theta_{t-1} + \varepsilon_t^\theta \\ E_t &= E_{t-1} + \varepsilon_t^E \end{aligned}$$

hvor matricerne  $F$  og  $G$  har dimensionerne  $1 \times n_\theta$  og  $n_\theta \times n_\theta$  og vektoren  $\theta_t$  er passende konstrueret og afhængigt af specifikationen.  $\hat{P}_t$  er faktorprisen, relativt til prisindekset. Stødende  $\varepsilon_t^s$  og  $\varepsilon_t^\theta$  kan tænkes som henholdsvis målefejl (eller støj i data-serierne) og ændringer effektivitetsindeksene - begge er antaget at være uafhængige og normalfordelte. Vi restingerer variansen på  $\varepsilon_t^E$  til 0, således at Kalman smotheren efterfølgende giver én værdi for  $E$  og vi benævner dette som vores elasticitetsestimater.

Centralt for beskrivelsen af CES-nestet er som tidligere nævnt de antagelser man gør omkring effektivitetsindeksene  $e_{jt}$  i produktionsfunktionen i (4). Vi forsøger to forskellige tilgange: Den første er en iterativ proces: Antag først at elasticiteten  $E$  er kendt. I dette tilfælde kan Kalman filteret hurtigt bruges til at konstruere den historiske udvikling i parametrene  $\mu_{jt}$  (uden målefejl ville det være en ren kalibreringsøvelse). Udgangspunktet er herefter at behandle serierne af parametre som »data« og derefter anvende standard økonomiske metoder til at karakterisere dem, f.eks. graden af persistens eller hvorvidt de har trends. I den første iteration antages, at  $\log(\mu_{jt})$  følger en Random Walk og elasticiteten estimeres fra Kalman smotheren. Herefter benyttes den automatiserede procedure, der er beskrevet i Hyndman and Khandakar [2008], til at vælge den bedste ARIMA-model, bl.a. baseret på informations-kriteriet og unit root tests. Hvis den bedste model er en Random Walk stoppes, hvis ikke, estimeres  $E$  i næste iteration, men hvor state-ligningen nu specificeres som den valgte ARIMA-model. Denne iteration fortsættes indtil den antagede beskrivelse af  $\mu_{jt}$  bekræftes efter estimationen. Uden i øvrigt at forholde os til værdien af  $E$  eller de resulterende faktor-specifikke indeks finder vi, at denne iterative metode generelt forbedrer systemets fit til data, samt at modelspecifikationen »konvergerer« efter nogle få iterationer. En oplagt ”risiko”, set med økonomibriller, ved ovenstående tilgang er, at den resulterende serie for  $e_{jt}$  ikke bliver tilstrækkeligt glat. Som et alternativ og som tilgang nummer 2 antager vi derfor, at  $\log(\mu_{jt})$  kan beskrives som en  $I(2)$ -process, således at vores system svarer til en kombination af en regressionsmodel og et HP-filter.

#### 3.1 Data

I estimationsprocessen anvendes data fra ADAMs databank for perioden 1967-2016 (se Appendiks for en specifikation af ADAM-variablene). Kapital består udelukkende af maskinkapital, hvilket er konsistent med Thomsen [2015]. For fremstillingssektoren (nz) anvendes en KELM-nestingstruktur og en KLEM-nestingstruktur anvendes for privat service (qz), da Thomsen 2013 finder, at disse strukturer foretrækkes for de enkelte sektorer.

Priser for de forskellige nests (KE og KEL for fremstillingssektoren samt KL og KLE for privat service) dannes som et Paasche kædeindeks (se Appendiks). Mængdeindekset udledes herefter ud fra en konsistensantagelse om nul profit. I det øverste nest indføres en mark-up, så der tillades for profit forskellig fra nul. Dermed gælder konsistensantagelsen om nul-profit i det sidste nest ud fra en optimeringspris (se Appendiks).

### 3.2 Resultater (foreløbige!)

Elasticitetsestimaterne er vist i Tabel 2. For fremstillingssektoren er elasticiteterne ikke langt fra Thomsen [2015], måske med undtagelse af KE-nestet. For den private servicesektor ser særligt KL-elasticiteten meget lav ud (dog fraregnet random walk specifikationen), og det samme gælder delvist for KEL-nestet. KLEM-elasticiteten på 0,74 ligger en anelse over Thomsen [2015]. De fleste af elasticiteterne ligger mellem 0 og 1 og dermed konsistente med en generel CES specifikation frem for antagelser om henholdsvis Leontief og Cobb-Douglas produktionsfunktioner. De relativt høje elasticiteter i KELM/KLEM nestene synes at understøtte valget i DREAM om, at materialer ikke modelleres separabelt til de øvrige produktionsfaktorer. Overordnet kan man nok også konkludere, at “trend-specifikationen” (forstået som restriktionerne der bliver pålagt de faktorspecifikke effektivitetsindeks) har en ikke uvæsentlig betydning.

## APPENDIKS

### A. Beskrivelse af data

De indre pris- og mængdeindeks er konstrueret som følgende kædeindeks:

$$\begin{aligned}
 P_t^{KE} &= \frac{p_t^K K_t + p_t^E E_t}{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^E E_t} P_{t-1}^{KE} \\
 X_t^{KE} &= \frac{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^E E_t}{P_{t-1}^{KE}} \\
 P_t^{KEL} &= \frac{P_t^{KE} X_t^{KE} + p_t^L L_t}{P_{t-1}^{KE} X_{t-1}^{KE} + p_{t-1}^L L_t} P_{t-1}^{KEL} \\
 X_t^{KEL} &= \frac{P_{t-1}^{KE} X_{t-1}^{KE} + p_{t-1}^L L_t}{P_{t-1}^{KEL}}
 \end{aligned}$$

Table 1: ADAM-variable anvendt til estimation. i angiver erhverv

	Priser	Mængder
Produktionsværdi	px(i)	fx(i)
Kapital	uim(i)	fkm(i)
Energi	pve(i)	fve(i)
Arbejdskraft	hq(i)	l(i)
Materialer	pvm(i)	fvm(i)

$$P_t^{KL} = \frac{p_t^K K_t + p_t^L L_t}{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^L L_t} P_{t-1}^{KL}$$

$$X_t^{KL} = \frac{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^L L_t}{P_{t-1}^{KL}}$$

$$P_t^{KLE} = \frac{P_t^{KL} X_t^{KL} + p_t^E E_t}{P_{t-1}^{KL} X_t^{KL} + p_{t-1}^E E_t} P_{t-1}^{KLE}$$

$$X_t^{KLE} = \frac{P_{t-1}^{KL} X_t^{KL} + p_{t-1}^E E_t}{P_{t-1}^{KLE}}$$

$$y_t p_t = (1 + m)(p_t^K K_t + p_t^E E_t + p_t^L L_t + p_t^M M_t)$$

$$y_t p_t^O = p_t^K K_t + p_t^E E_t + p_t^L L_t + p_t^M M_t, \quad p_t^O \equiv \frac{p_t}{1 + m}$$

## B. Tabeller og figurer

Table 2: CES-elasticiteter, sammenlignet med Thomsen [2015] for fremstillings- og servicesektoren (nz og qz) 1970-2016, substitutionselasticiteter

	Elasticitet, estimat	TT
Fremstillingssektoren		
KE	0,17 (0,17) [0,21]	0,35
KEL	0,29 (0,47) [0,24]	0,42
KELM	0,68 (0,68) [0,42]	0,68
Servicesektoren		
KL	0,04 (0,46) [0,03]	0,61
KLE	0,05 (0,11) [0,05]	0,19
KLEM	0,74 (0,83) [0,76]	0,67

Anm.: Estimaterne er for den iteration med lavest AIC (Random Walk estimatet er angivet i parentes) [HP-filteret er angivet i kantet parentes]. TT refererer til CES-elasticiteterne i Thomsen [2015]. Bemærk, at perioden i de to papirer ikke er helt den samme.

Figure 1: Effektivitetsindeks, KELM-nestet (iterativ specifikation)

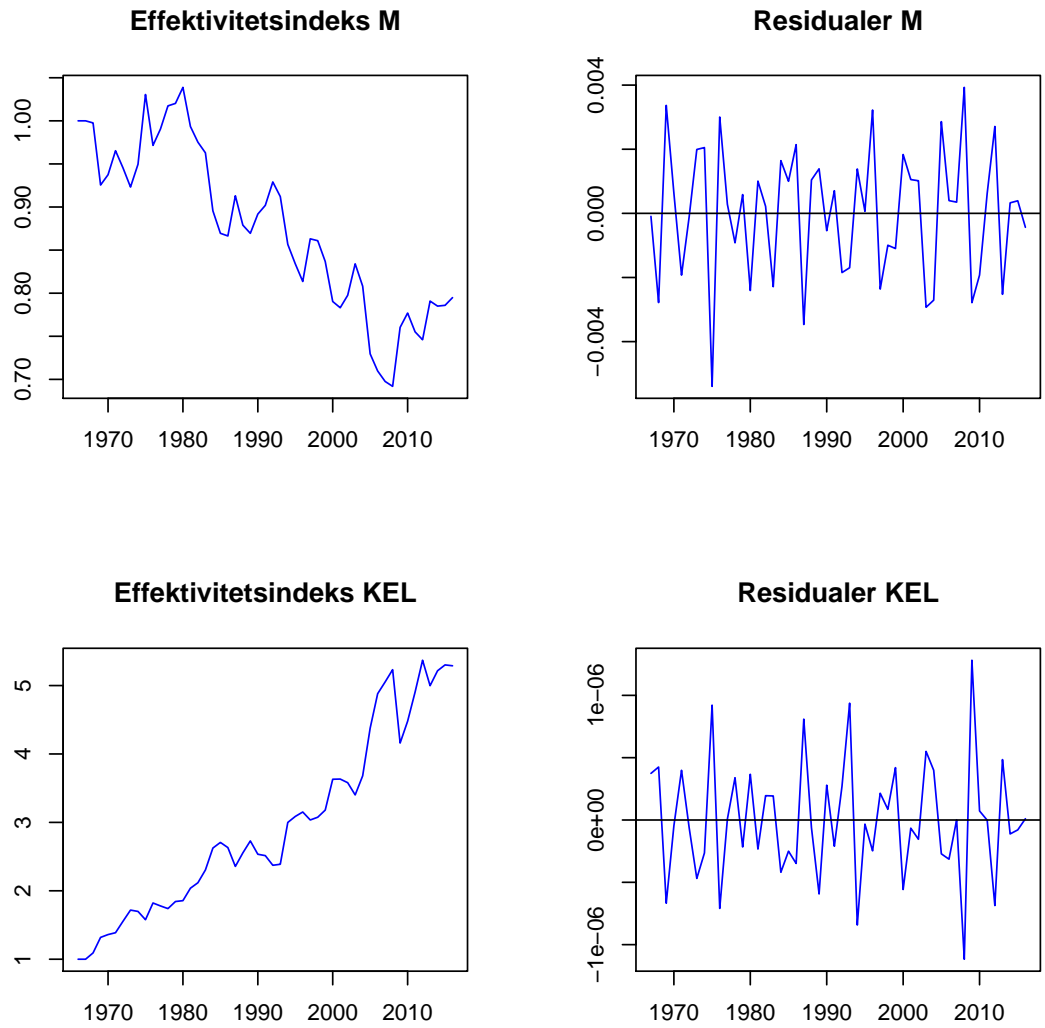
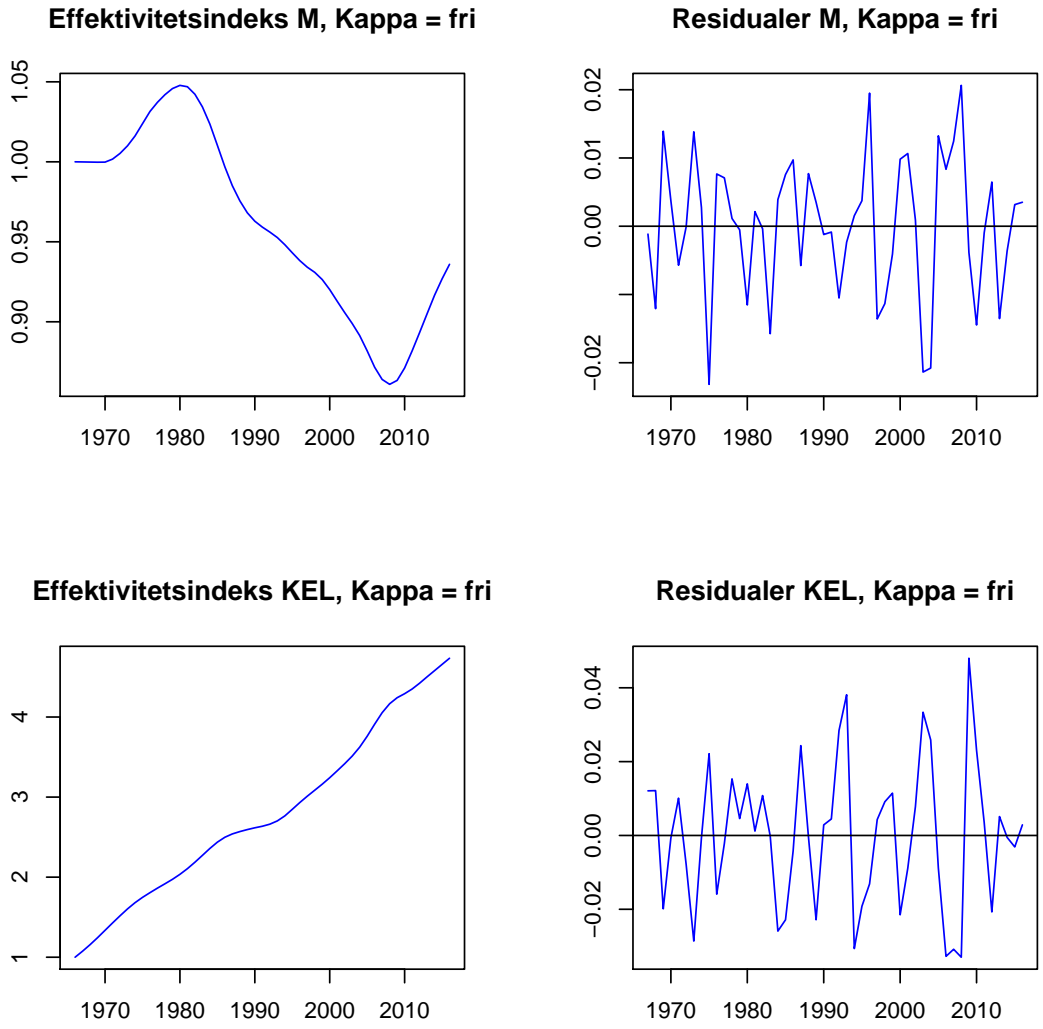


Figure 2: Effektivitetsindeks, KELM-nestet (HP-filter spesifikasjon)



## References

- P. Antras. Is the u.s. aggregate production function cobb-douglas? new estimates of the elasticity of substitution. *Contributions to Macroeconomics*, 2004.
- O. Blanchard. The medium run. *Brookings Paper on Economic Activity*, 1997.
- R. J. Hyndman and Y. Khandakar. Automatic time series forecasting: the forecast package for r. *Journal of Statistical Software*, 2008.
- R. Klump, P. McAdam, and A. Willman. Factor substitution and factor-augmenting technical progress in the united states: A normalized supply-side system approach. *The Review of Economics and Statistics*, 2007.
- T. Thomsen. Klem-estimationer 1968-2013. *Danish Energy Agency Working Paper*, 2015.